**SEGUNDO PARCIAL** **CÁLCULO NUMÉRICO** 18-6-2010

- Duración del examen: 2 horas
- La nota del examen será la media de la nota de los problemas planteados. Los problemas puntúan lo mismo.
- Fecha prevista de publicación de notas: 1-Julio -2010
- Los alumnos que deseen revisión de su examen deberán solicitarlo por escrito los días 2 y 5 de Julio (de 9:00 a 14:00 horas) en el despacho D-5210. La revisión en presencia del alumno será el día 6 de Julio a las 13 horas en la Sala de Reuniones 2, situada junto a D.5208.

---

## 1^er Problema

Se considera el sistema lineal Ax = b, donde

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

siendo $a$ un número positivo. Se pide:

i) Determinar los valores del parámetro $a$ para los cuales la matriz A admite factorización de Cholesky.

ii) Estudiar la convergencia del método de Gauss-Seidel aplicado a la resolución del sistema Ax = b.

## 2° Problema

Hallar una fórmula de integración del tipo

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(-1) + A_1 f(1) + A_2 f'(-1) + A_3 f'(1)$$

que sea exacta para polinomios del mayor grado posible. Determinar el grado de exactitud para polinomios de la fórmula anterior. Explicar si es una fórmula de Newton-Cotes, de Gauss o de ninguno de los dos tipos anteriores.

**3$^{er}$ Problema**

Se considera el problema de valor inicial $y'(x) = f(x, y(x)), y(x_0) = y_0$ con $f$ de la forma $f(x, y(x)) = Ky(x) + g(x)$. La ecuación diferencial de este problema se puede escribir, integrando ambos miembros de la ecuación diferencial entre $x_n$ y $x_{n+1} = x_n + h$, $h > 0$, en la siguiente forma equivalente:

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = K\int_{x_n}^{x_{n+1}} y(x)\,dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} g(x)\,dx$$

Se pide:

1. Comprobar que aproximando las integrales anteriores por la fórmula del trapecio se puede deducir, en el caso que $Kh \neq 2$, el método de un paso explícito, $y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h)$ con $\Phi$ dada por:

$$\Phi(x, y, h) = \frac{2K}{2-Kh}\,y - \frac{1}{2-Kh}[g(x) + g(x+h)]$$

2. Aplicar el método al problema $y' = -y + 1, y(0) = 2, h = 1$, determinando los valores $y_1, y_2, \ldots$

## SOLUCIONES

### 1$^{er}$ Problema

i) La matriz A es simétrica para todo escalar a, para que A admita una factorización de Cholesky debe ser definida positiva. Utilizando el criterio de Sylvester, se concluye que es definida positiva si

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 > 0 \Leftrightarrow |a| < 1 \quad y$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2a^2 > 0 \Leftrightarrow |a| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

De lo anterior se concluye A es definida positiva, y por tanto admite una factorización de Cholesky, si $|a| < \frac{1}{\sqrt{2}}$. En nuestro caso como a es un escalar positivo, $0 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

ii) Para analizar la convergencia del método de Gauss-Seidel, vamos a estudiar los autovalores de la matriz B del método de dicho método, siendo B

$$B = (I - L)^{-1} U, \text{ con } L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix} \text{ y } U = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\lambda$ es autovalor de la matriz B, si y sólo si anula su polinomio característico:

$$\det(B - \lambda I) = \det((I - L)^{-1} U - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow 0 = \det(U - \lambda I + \lambda L) \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & a & 0 \\ \lambda a & \lambda & a \\ 0 & \lambda a & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ y } \lambda = 2a^2.$$

Por tanto dicho método converge si y sólo si todos sus autovalores son en módulo menores que 1. Esto es, $|a| < \frac{1}{\sqrt{2}}$. En nuestro caso como a es un escalar positivo, $0 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

PROBLEMA 3

El problema de valor inicial $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(x_0) = y_0$ con $f$ de la forma $f(x, y(x)) = K y(x) + g(x)$ se puede poner integrando ambos miembros de la ecuación diferencial entre $x_n$ y $x_{n+1} = x_n + h$ $h > 0$ en la siguiente forma equivalente:

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = K \int_{x_n}^{x_{n+1}} y(x)\,dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} g(x)\,dx$$

Se pide:

1) Comprobar que aproximando las integrales por la fórmula del trapecio se puede deducir, en el caso de que $Kh \neq 2$ el método de un paso explícito

$$y_{n+1} = y_n + h\,\Phi(x_n, y_n, h) \quad \text{con } \Phi \text{ dada por}$$

$$\Phi(x, y, h) = \frac{2K}{2-Kh}\,y + \frac{1}{2-Kh}\left[g(x) + g(x+h)\right]$$

2) Aplicar el método al problema $y' = -y + 1$, $y(0) = 2$, $h = 1$, determinando los valores $y_1, y_2$.

~~Comparar los resultados con los que da el método de Euler y con los de la solución exacta.~~

3) Estudiar la consistencia, estabilidad y convergencia del método indicando en el primer apartado. Indicar cuál es el orden del método comprobando previamente que el error local de truncamiento ~~local de truncamiento~~ ~~de consistencia~~. se puede poner como

$$u_{n+1} = - \frac{\left[ k\, y''(x_n + \theta h) + y''(x_n + \theta h)) \right]}{6\,(2 - kh)}\, h^3$$

1) Aplicamos la fórmula del trapecio:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(y(x_n) + y(x_{n+1})\right) + R_1$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} g(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(g(x_n) + g(x_{n+1})\right) + R_2$$

Luego:

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = K\int_{x_n}^{x_{n+1}} y(x)\,dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} g(x)\,dx \;:$$

$$\Updownarrow$$

$$= K\left[\frac{h}{2}\left(y(x_n) + y(x_{n+1})\right) + R_1\right] + \frac{h}{2}\left(g(x_n) + g(x_{n+1})\right) + R_2$$

Reordenando y agrupando para que se parezca a un método, $x_{n+1} = x_n + h$

$$\left(1 - \frac{kh}{2}\right) y(x_{n+1}) = \left(1 + \frac{kh}{2}\right) y(x_n) + \frac{h}{2}\left(g(x_n) + g(x_n + h)\right) + R$$

donde $R = KR_1 + R_2$ error debido a las fórmulas de integración

$$y(x_{n+1}) = \frac{1 + \frac{kh}{2}}{1 - \frac{kh}{2}}\, y(x_n) + \frac{h}{2-kh}\left(g(x_n) + g(x_n + h)\right) + R^*$$

donde $R^* = \dfrac{KR_1 + R_2}{1 - \frac{kh}{2}}$

$$y(x_{n+1}) = \frac{2 + Kh}{2 - Kh}\, y(x_n) + \frac{h}{2-kh}\left(g(x_n) + g(x_n + h)\right) + R^*$$

Ahora sumamos y restamos $y(x_n)$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \frac{2+kh}{2-kh} \underbrace{y(x_n) - 1\cdot y(x_n)}_{\text{Saco Factor común}} + \frac{h}{2-kh}(g(x_n) + g(x_n+h)) + R^*$$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \frac{2+kh-2+kh}{2-kh} y(x_n) + \frac{h}{2-kh}(g(x_n)+g(x_n+h)) + R$$

Saco factor común el $h$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \underbrace{\left[ \frac{2k}{2-kh} y(x_n) + \frac{1}{2-kh}(g(x_n)+g(x_n+h)) \right]}_{\Phi(x,y,h)} + R'$$

2) $P \begin{cases} y' = -y+1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$ $\qquad f(x, y(x)) = k\,y(x) + g(x)$

$k = -1, \quad g(x) = 1$

$h = 1$

El método para nuestro problema de valor inicial

$$y_{n+1} = y_n + \frac{2\cdot -1}{2 - -1\cdot 1} y_n + \frac{1}{2 - -1\cdot 1}(1+1) \Rightarrow$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{3} y_n + \frac{2}{3}$$ Aplicamos el método $x_n = x_0 + nh$,

$x_n = 0 + n\cdot 1 = n$

$x_0 = 0 \rightarrow y_0 = 2 \qquad x_2 = 2 \rightarrow y_2 = \frac{10}{9}$ .......

$x_1 = 1 \rightarrow y_1 = \frac{4}{3} \qquad x_3 = 3 \rightarrow y_3 = \frac{28}{27}$

3)

- Consistencia $\quad \Phi(x, y, 0) = f(x, y)$

$$\Phi(x, y, 0) = \frac{2k}{2-0} y + \frac{1}{2-0} [g(x) + g(x+0)] =$$

$$= k y + g(x) = f(x, y)$$

luego si $h \neq 2/k \Rightarrow \Phi$ es continua y está garantizada la consistencia del método. $\to kh \neq 2$ ENUNCIADO.

- Estabilidad: $\Phi(x, y, h)$ Lipschitz en su segunda variable

$$|\Phi(x, y, h) - \Phi(x, y^*, h)| \leq M |y - y^*|$$ siendo $M < \infty$

~~independiente del paso h.~~

sólo cambia $y, y^*$

$$|\Phi(x, y, h) - \Phi(x, y^*, h)| = \left| \frac{2k}{2-kh} (y - y^*) \right| + 0 =$$

$$= \frac{2|k|}{|2-kh|} |y - y^*| \leq M |y - y^*|$$ siendo

$$M = \max \frac{2|k|}{|2-kh|} \qquad kh \neq 2$$

- Convergencia = Consistencia + Estabilidad.

- Error local de truncamiento:

~~consistencia~~

Para deducir el error local de truncamiento, nos basamos en el error calculado a la hora de construir el método utilizando las fórmulas de integración, como hemos hecho en el apartado 1:

$$R^* = \frac{K R_1 + R_2}{1 - \frac{kh}{2}} = \frac{2}{2-kh} \left( K R_1 + R_2 \right)$$ siendo $R_1, R_2$

los errores al aplicar la fórmula del trapecio.

$\alpha = x_n + \theta h$
$0 < \theta < 1$

$$R^* = \frac{2}{2-Kh} \left( - \frac{K y''(\alpha) h^3}{12} - \frac{g''(\alpha) h^3}{12} \right) =$$

$$= - \frac{K y''(\alpha) + g''(\alpha)}{6(2-Kh)} h^3 = \cancel{\phantom{xx}}$$

Una vez calculado el error de ~~consistencia~~ truncamiento, utilizando la definición de orden de un método, que se basa en el error de consistencia $\frac{R_{n+1}}{h}$, El método será de orden $p$

$$|u_{n+1}| \leq K h^p$$

CONSISTENCIA

$$\left| - \frac{K y''(\alpha) + g''(\alpha)}{6(2-Kh)} h^2 \right| \leq K h^2$$ siendo $K = \frac{C_1}{C_2}$

$C_1 = \max |K y''(x) + g''(x)|$

$C_2 = \min |2 - Kh|$

luego orden 2

También se puede comprobar mediante las derivadas.